E.N.S. SAINT-CLOUD FONTENAY

OPTION SCIENCES PHYSIQUES. MATH 1

Durée : 4 heures

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit q une fonction définie sur I, à valeurs réelles et indéfiniment dérivable. Une solution de l'équation différentielle :

$$y'' + qy = 0$$

est une fonction u, définie sur I, à valeurs réelles, indéfiniment dérivable et telle que, pour tout $t \in I$, on ait :

$$u''(t) + q(t)\, u(t) = 0.$$

Un zéro de u est un $t \in I$ tel que $u(t) = 0$.

Dans les parties I et II, μ désigne un nombre réel.

I

1° On suppose que $I = \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + \left(\mu - \frac{1}{4}\right) y = 0.$$

2° On suppose que $I = \mathbb{R}_+^* = \{t \in \mathbb{R},\ t > 0\}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{\mu}{t^2}\, y = 0.$$

(On pourra introduire la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(s) = y(e^s)\, e^{-\frac{s}{2}}$.)

3° On suppose que $I = \{t \in \mathbb{R},\ t > 1\}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{\mu}{(\operatorname{Log} t)^2}\right] y = 0.$$

4° Montrer que, dans les trois cas ci-dessus :

a. Si $\mu \leqslant \frac{1}{4}$, toute solution non nulle admet au plus un zéro;

b. Si $\mu > \frac{1}{4}$, toute solution admet une suite de zéros qui tend vers $+\infty$.

5° On suppose que $I = \mathbb{R}_+^*$. Tracer le graphe de la solution u de l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{2t^2}\, y = 0$$

qui est telle que $u(1) = 1$ et $u'(1) = \frac{1}{2}$.

II

Soient q_1 et q_2 deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles, indéfiniment dérivables et telles que, pour tout $t \in I$, on ait $q_2(t) \geqslant q_1(t)$.

Soit u une solution de l'équation différentielle $y'' + q_1 y = 0$ qui admet deux zéros α et β, avec $\alpha < \beta$ et $u(t) \neq 0$ pour $t \in]\alpha, \beta[$.

Soit v une solution de l'équation différentielle $y'' + q_2 y = 0$.

1° En utilisant la fonction $u''v - v''u$, montrer que v admet au moins un zéro dans $]\alpha, \beta]$.

2° Montrer que toute solution non nulle de $y'' + q_1 y = 0$ admet un zéro unique dans $]\alpha, \beta]$.

Tournez la page S. V. P.

ENS Saint-Cloud-Fontenay
Option Sciences physiques.Math 1
1986
page 45

3° On suppose que $I = \mathbb{R}_+^*$ et que $\mu > \frac{1}{4}$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{\mu}{t^2} y = 0$$

admet un zéro dans tout intervalle $\left[\exp\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2\rho}\right), \exp\left(\frac{3\pi + 2k\pi}{2\rho}\right)\right]$, où $k \in \mathbb{N}$ et $\rho = \left(\mu - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4° On suppose que $I =]T, \infty[$ avec $T > 1$ et que $\mu > \frac{1}{4}$.

On suppose de plus que l'une des conditions ci-dessous est satisfaite :

a. Pour tout $t \in I$, $q(t) \geqslant \frac{\mu}{t^2}$;

b. Pour tout $t \in I$, $q(t) \geqslant \frac{1}{4t^2} + \frac{\mu}{t^2 (\text{Log } t)^2}$.

Montrer que toute solution de $y'' + qy = 0$ possède une suite de zéros qui tend vers $+\infty$.

5° On suppose que $I =]T, \infty[$ avec $T > 1$. Montrer que, pour toute solution non nulle u de :

$$y'' + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) y = 0,$$

les zéros de u forment une suite croissante t_n telle que :

a. Pour tout n, $t_{n+1} - t_n > \pi$;

b. $\lim_{n \to \infty} t_{n+1} - t_n = \pi$.

6° On suppose que $I =]T, \infty[$ et que $\lim_{t \to \infty} q(t) = 1$. Montrer qu'il existe $T' \geqslant T$ tel que, pour toute solution non nulle u de $y'' + qy = 0$, les zéros de u qui appartiennent à $]T', \infty[$ forment une suite croissante t_n telle que $\lim_{n \to \infty} t_{n+1} - t_n = \pi$.

III

Soient $a \in I$ et $b \in I$ avec $a < b$.

Soient $\alpha \in [0, \pi]$ et $\beta \in [0, \pi]$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on note $E(\lambda)$ l'ensemble des solutions u de l'équation différentielle :

$$y'' + (q + \lambda) y = 0$$

qui satisfont aux conditions (C) :

$$(C_1) \quad u(a) \cos \alpha - u'(a) \sin \alpha = 0$$

$$(C_2) \quad u(b) \cos \beta - u'(b) \sin \beta = 0.$$

Soit λ_n, $n \geqslant 1$, une suite de nombres réels telle que $\lambda_{n+1} > \lambda_n > 0$ et $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$. On suppose que $(E(\lambda) \neq \{0\})$ équivaut à (λ est l'un des λ_n).

1° Déterminer la suite λ_n lorsque $I = \mathbb{R}$, $q = 0$ et $\alpha = \beta = 0$.

2° Déterminer la limite de $\frac{\lambda_n}{n^2}$ lorsque $I = \mathbb{R}$, $q = 0$ et $\alpha = 0$.

3° Soit h une fonction définie sur I, à valeurs réelles et indéfiniment dérivable. Pout tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on note $F(\lambda)$ l'ensemble des solutions u de l'équation différentielle :

$$y'' + (q + \lambda) y = h$$

qui satisfont aux conditions (C).

a. Montrer que si $E(\lambda) = \{0\}$ le cardinal de $F(\lambda)$ vaut 1.

b. Montrer que $F(\lambda_n)$ est non vide si et seulement si, pour tout $v \in E(\lambda_n)$, on a $\int_a^b v(t)\, h(t)\, dt = 0$.

page 46 1986 ENS Saint-Cloud—Fontenay Option Sciences physiques Math 1